PRÜFUNGSTEIL HT 1

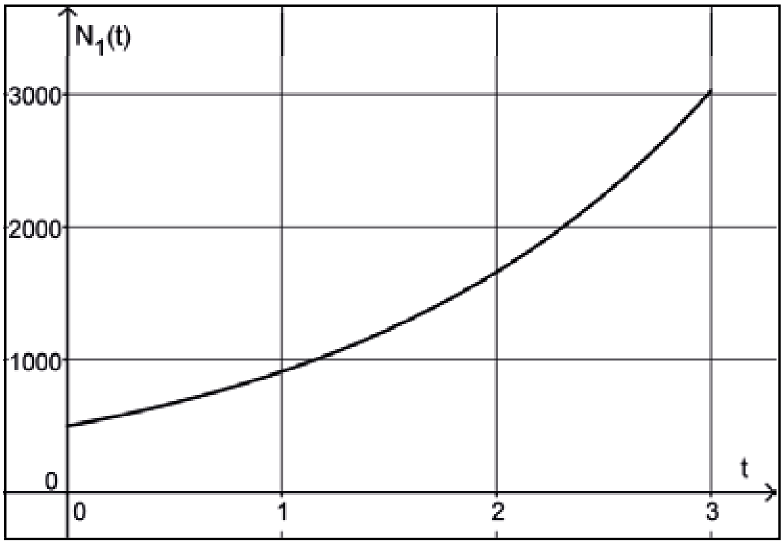
Aufgabenstellung

Ein Schüler beobachtet in einem Experiment insgesamt sechs Tage lang die Vermehrung von Pantoffeltierchen in einer Nährlösung. Zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen während der ersten drei Tage verwendet er für $0 \le t \le 3$ die Funktion N_1 mit der Gleichung

$$N_1(t) = 500 \cdot e^{0{,}6 \cdot t}\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

Dabei wird t als Maßzahl zur Einheit 1 Tag und $N_1(t)$ als Anzahl der Pantoffeltierchen zum Zeitpunkt t aufgefasst.

Der Graph von N_1 ist in der *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

a) **(1)** *Berechnen Sie den Funktionswert von N_1 an der Stelle $t = 3$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.*

(2) *Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem 2000 Pantoffeltierchen in der Nährlösung vorhanden sind.*

(3) *Berechnen Sie, um wie viele Tiere pro Tag die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung während der ersten drei Tage durchschnittlich wächst.*

(4) *Begründen Sie, warum eine Funktion mit dem Funktionsterm $500 \cdot e^{0{,}6 \cdot t}$ nur für einen begrenzten Zeitraum zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen geeignet ist.*

(3 + 4 + 3 + 4 Punkte)

Während der ersten drei Tage (für $0 \le t \le 3$) wird im Modell des Schülers die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen durch die Funktion r_1 mit der Gleichung

$$r_1(t) = 300 \cdot e^{0{,}6 \cdot t}, \; t \in \mathbb{R},$$

beschrieben.

Dabei wird $r_1(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1 Tier pro Tag aufgefasst.

b) Für die Funktion r_1 und die zugehörige Ableitungsfunktion r_1' gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Aussage:

$$r_1(t) > 0 \text{ und } r_1'(t) > 0.$$

[Die Gültigkeit dieser Aussage müssen Sie nicht nachweisen.]

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang.

(6 Punkte)

c) Bei der weiteren Beobachtung erkennt der Schüler, dass nach etwa drei Tagen die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen geringer wird. Zur Modellierung der momentanen Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen nach dem dritten Tag bis zum Ende der Beobachtung (also für $3 \le t \le 6$) verwendet der Schüler die Funktion r_2 mit der Gleichung

$$r_2(t) = 300 \cdot e^{3{,}6 - 0{,}6 \cdot t}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Dabei wird $r_2(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1 Tier pro Tag aufgefasst.

(1) *Zeigen Sie, dass für die Funktionen r_1 und r_2 für alle $a \in \mathbb{R}$ die Gleichung $r_2(3 + a) = r_1(3 - a)$ gilt.*

(2) *Interpretieren Sie die Bedeutung der Gleichung $r_2(3 + a) = r_1(3 - a)$ für $0 \le a \le 3$ im Sachzusammenhang.*

(3) *Zeigen Sie, dass die Funktion F mit der Gleichung $F(x) = -\frac{5}{3} \cdot e^{3{,}6 - 0{,}6 \cdot x}$ eine Stammfunktion der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = e^{3{,}6 - 0{,}6 \cdot x}$ ist.*

(4) *Bestimmen Sie, wie viele Pantoffeltierchen in der Nährlösung im Laufe des vierten Tages (d. h. im Intervall [3;4]) hinzukommen, wenn die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pantoffeltierchen für $3 \le t \le 6$ durch die Funktion r_2 beschrieben wird.*

(5) *Ermitteln Sie ausgehend von den Funktionen N_1 und r_2 eine Gleichung der Funktion N_2, durch die die Anzahl der Pantoffeltierchen nach dem dritten Tag bis zum Ende der Beobachtung beschrieben werden kann.*
[Zur Kontrolle: $N_2(t) = 1000 \cdot e^{1{,}8} - 500 \cdot e^{3{,}6 - 0{,}6 \cdot t}$]

(6) Der Schüler verwendet die Funktion N_2 auch zur Modellierung der Anzahl der Pantoffeltierchen für $t \geq 6$.

Begründen Sie, dass in diesem Modell die Anzahl der Pantoffeltierchen in der Nährlösung zu keinem Zeitpunkt größer als 6050 wird.

(5 + 4 + 4 + 6 + 7 + 4 Punkte)

LÖSUNGEN HT 1

Aufgabe a)

Ein Schüler beobachtet in einem Experiment ...

> **HINWEIS** Thema sind hier die Exponentialfunktion und ihre Umkehrfunktion. Wie löst man Exponentialgleichungen? Was ist der Unterschied zwischen durchschnittlicher und momentaner Änderungsrate?

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Vergegenwärtigen Sie sich die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und Exponentialgleichungen.
3.	Schreiben Sie die jeweils zu lösende Gleichung auf und führen Sie die geforderten Rechnungen aus.
4.	Formulieren Sie jeweils einen kurzen und präzisen Antwortsatz.

Stichpunktlösung

(1) Funktionswert bei $t = 3$:

$$N_1(3) = 500 \cdot e^{0,6 \cdot 3} = 3024,8$$

Laut Aufgabenstellung gibt es bei $t = 0$ genau 500 Pantoffeltierchen, nach 3 Tagen wären es nach dem Modell 3024,8. Wenn man nur „ganze“ Tiere gelten lässt, lautet die Antwort 3024.

(2) t-Wert zum Funktionswert 2000:

$$\begin{aligned} & N_1(t) = 500 \cdot e^{0,6 \cdot t} = 2000 \\ \Leftrightarrow \quad & 0,6 \cdot t = \ln 4 \\ \Leftrightarrow \quad & t \approx 2,31 \end{aligned}$$

Durch Logarithmieren löst man die Gleichung nach t auf. Die Zahl 2000 Pantoffeltierchen wird dem Modell zufolge nach etwa 2,31 Tagen (2 Tagen, 7 Stunden, 27 Minuten) erreicht.

(3) Mittlere Änderungsrate:

Die durchschnittliche Änderung berechnet man mit dem *Differenzen*quotienten (*nicht* mit dem Differenzialquotienten, d. h. der Ableitung!):

$$\hat{N}_1 = \frac{\Delta N_1}{\Delta t} \approx \frac{3024{,}8}{3} \approx 1008{,}3$$

Sie beträgt etwa 1008 Tiere pro Tag.

(4) Grenzen des Modells:

Wenn man t sehr groß werden lässt, divergiert die Exponentialfunktion in der Formel für $N_1(t)$. Daher kann das Modell nicht für beliebig lange Zeiten gelten.

Aufgabe b)

Für die Funktion ...

> HINWEIS Hier sind keine Rechnungen gefordert, sondern es geht darum, die Bedeutung des Begriffs „Änderungsrate" – vgl. Aufgabe a) (3) – und von deren Ableitung zu erklären. Was heißt es, wenn die Änderungsrate bzw. ihre Ableitung positive Werte hat? Machen Sie sich vor allem klar, welche Konsequenzen die Vorzeichen von erster und zweiter Ableitung für das Aussehen des Funktionsgraphen haben.

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Wenn Sie möchten, können Sie auch eine Skizze anfügen, dies ist aber nicht unbedingt notwendig.
3.	Formulieren Sie Ihren Antwortsatz kurz, präzise und logisch.

Stichpunktlösung

- Die momentane Änderungsrate einer Funktion – hier $r(t)$ – wird durch ihre erste Ableitung beschrieben, sie entspricht der Steigung des Funktionsgraphen. Wenn diese für alle t-Werte im Definitionsbereich ($0 \le t \le 3$) positiv ist, nimmt die Funktion selbst streng monoton zu.
- Die Ableitung der Änderungsrate, also der ersten Ableitung, ist die zweite Ableitung, sie entspricht der Krümmung des Funktionsgraphen der ursprünglichen Funktion. Eine für alle $0 \le t \le 3$ positive Krümmung bedeutet, dass die Funktionswerte desto stärker zunehmen, je größer t ist, da die Änderungsrate immer mehr anwächst. Der Funktionsgraph der

Ursprungsfunktion weist dann eine Linkskrümmung auf. Er kann außerdem nur an den Rändern des Definitionsbereichs Extremwerte besitzen, da die zweite Ableitung an einer Extremstelle innerhalb eines Intervalls null sein muss.

- Im Sachzusammenhang heißt dies: Es gibt immer mehr Pantoffeltierchen, und je mehr schon da sind, desto schneller werden es noch mehr – ein typischer Fall von exponentiellem Wachstum.

Aufgabe c)

Bei der weiteren Beobachtung …

> HINWEIS Vergegenwärtigen Sie sich die Beziehungen zwischen Stammfunktion, Funktion und Ableitung. Sie müssen nicht integrieren, aber Sie sollten korrekt ableiten können. Was ist ein unbestimmtes, was ein bestimmtes Integral? Finden Sie Bedingungen, welche für die zunächst unbekannte Funktion $N_2(t)$ aus dem bereits Bekannten folgen.

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Machen Sie sich klar, welche Funktion in welchem Intervall betrachtet wird.
3.	Notieren Sie bei Ihren Rechnungen und bei der Diskussion der Funktion $N_2(t)$ jeweils genügend viele Zwischenschritte. Dann kann nicht nur der Korrektor Ihre Arbeit nachvollziehen, Sie können auch selbst kontrollieren, ob Sie an alles gedacht haben.

Stichpunktlösung

(1) Ableitungsfunktionen an der Übergangsstelle:

$$r_2(3+a) = r_1(3-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad 300 \cdot e^{3{,}6-0{,}6\cdot(3+a)} = 300 \cdot e^{0{,}6\cdot(3-a)}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{3{,}6-3{,}6} = e^{0{,}6a-0{,}6a}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = 1$$

(2) Interpretation der Gleichung:

Die Ableitung bzw. Änderungsrate von N_1 bzw. N_2 ist bei gleichem Abstand a von der Stelle $t = 3$ (also am Übergang zwischen den beiden betrachteten Zeitintervallen) auf beiden Seiten gleich.
Für a gegen 0 haben die jeweiligen Ableitungsfunktionen der Pantoffeltierchenzahl auf beiden Seiten von $t = 3$ den gleichen Grenzwert. Also haben N_1 und N_2 an der Stelle $t = 3$ die gleiche Ableitung und die Funktionsgraphen gehen ohne „Knick“ ineinander über. (N_2 ist die zu r_2 gehörende Modellierung der Pantoffeltierchenzahl im Intervall zwischen $t = 3$ und $t = 6$, s. u.)

Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass die Änderungsrate nach $t = 3$ genauso abnimmt, wie sie vorher zugenommen hat. Dass sich das Verhalten ändert, kann daran liegen, dass sich ab $t = 3$ die Begrenztheit der Ressourcen (Platz, Nährstoffe …) bemerkbar macht, sodass es einen Übergang vom unbegrenzten, exponentiellen Wachstum zu einem begrenzten Wachstum gibt.

(3) Bestätigen der Stammfunktion:

$$F'(x) = \left(-\frac{5}{3}\cdot e^{3,6-0,6\cdot x}\right)' = -\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{3}\cdot e^{3,6-0,6\cdot x}\right) = e^{3,6-0,6\cdot x} = f(x)$$

Die Ableitung von F ist tatsächlich gerade die Funktion f, damit ist F eine Stammfunktion von f.

(4) Pantoffeltierchen-Nachwuchs am vierten Tag:

Die absolute Zunahme ist das bestimmte Integral über die Änderungsrate mit den Grenzen des betrachteten Zeitraums als Integrationsgrenzen:

$$\Delta N_2(x) = \int_3^4 300\cdot e^{3,6-0,6\cdot t}dt = 300\cdot\left[-\frac{5}{3}\cdot e^{3,6-0,6\cdot t}\right]_3^4 = -500\cdot\left(e^{1,2}-e^{1,8}\right) \approx 1364,8$$

Im Verlauf des vierten Tages kommen nach Modell insgesamt 1364,8, also 1364 komplette Tiere hinzu.

(5) Funktionsgleichung für N_2:

Weil N_2 eine Stammfunktion von r_2 ist, gilt:

$$N_2(t) = -500\cdot e^{3,6-0,6t} + C$$

Außerdem müssen N_1 und N_2 an der Übergangsstelle $t = 3$ denselben Funktionswert haben:

$$N_2(3) = -500\cdot e^{3,6-0,6\cdot 3} + C = N_1(3) = 500\cdot e^{0,6\cdot 3}$$

$$\Rightarrow \quad C = 500\cdot\left(e^{1,8}+e^{1,8}\right) = 1000\cdot e^{1,8} \approx 6049,6$$

Daraus folgt dann

$$N_2(t) = -500\cdot e^{3,6-0,6t} + 1000\cdot e^{1,8} \approx 6049,6 - 500\cdot e^{3,6-0,6t}$$

(6) Obere Schranke für Funktionswerte von N_2:

Die Zahl 6050 ist eine obere Schranke der Funktionswerte von N_2.
Begründung: Da die Exponentialfunktion $y(x) = e^x$ niemals negativ wird, wird für alle Werte von t innerhalb des Definitionsbereichs im Funktionsterm von N_2 eine positive Zahl von 6049,6 abgezogen. Deswegen kann kein Funktionswert größer als dieser Wert und schon gar nicht größer als 6050 sein.

PRÜFUNGSTEIL HT 2

Aufgabenstellung

Eine Familie will ihren Bedarf an Wärmeenergie (thermischer Energie) für Heizung und Warmwasser teilweise durch eine thermische Solaranlage (kurz: Solaranlage) decken. Anhand der Angaben des Solaranlagenherstellers und der Verbrauchswerte der Familie aus dem letzten Kalenderjahr wurde das folgende Modell für ein beispielhaftes Kalenderjahr aufgestellt.

Die **Leistung der Solaranlage** wird durch die Funktion *f* mit der Gleichung

$$f(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400,\ t \in \mathbb{R}\ ,$$

und der thermische **Leistungsbedarf** der Familie (kurz: Leistungsbedarf) durch die Funktion *g* mit der Gleichung

$$g(t) = -t^4 + 26t^3 - 167{,}5t^2 - 12{,}5t + 2053,\ t \in \mathbb{R}\ ,$$

modelliert, und zwar für das Zeitintervall [0;12], das dem Kalenderjahr entspricht.

Dabei fasst man *t* als Maßzahl zur Einheit 1 Monat und *f*(*t*) sowie *g*(*t*) als Maßzahlen zur Einheit 1 Kilowattstunde pro Monat [kWh/Monat] auf. (Im Modell umfasst jeder Monat 30 Tage.)
Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Beginn des Kalenderjahres.

Die Graphen von *f* und *g* sind in der *Abbildung* auf *Seite 9* dargestellt.

a) **(1)** *Vergleichen Sie die Graphen von f und g im Sachzusammenhang.*

(2) *Berechnen Sie* $\frac{f(0)}{g(0)}$ *und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.*

(3) *Zeigen Sie, dass die Leistung der Solaranlage zu den Zeitpunkten* $t_1 = 3$ *und* $t_2 = 9{,}5$ *dem Leistungsbedarf der Familie entspricht.*

(5 + 5 + 4 Punkte)

b) **(1)** *Bestimmen Sie den Zeitpunkt der maximalen Leistung der Solaranlage und berechnen Sie den Maximalwert.*

(2) *Ermitteln Sie den Zeitpunkt im Intervall [0;12], zu dem der durch g beschriebene Leistungsbedarf der Familie innerhalb eines Kalenderjahres am stärksten abnimmt.*

(8 + 10 Punkte)

Durch das Integral $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ist im Sachzusammenhang die **aus der Solaranlage im Zeitintervall [a; b] abrufbare Energie** und durch das Integral $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ der **Energiebedarf der Familie im Zeitintervall [a; b]** für $0 \leq a < b \leq 12$ in Kilowattstunden [kWh] gegeben.

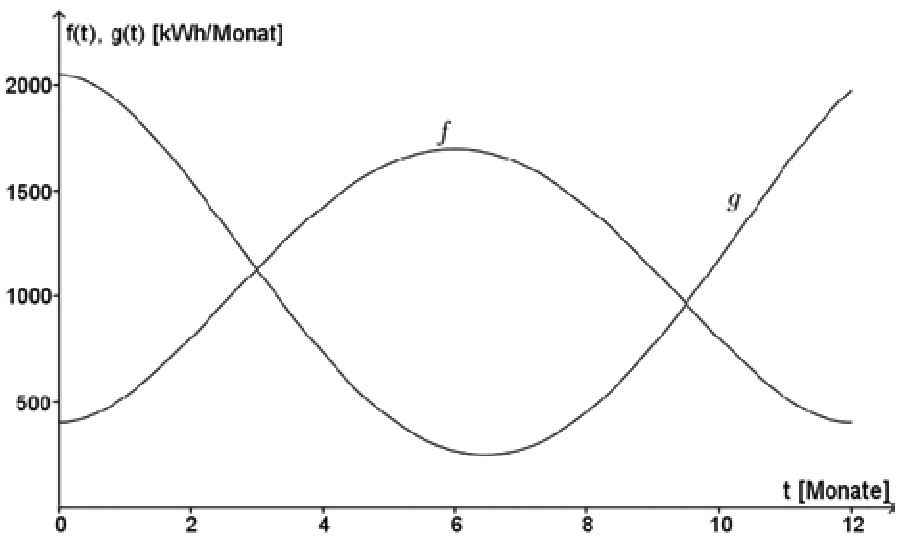
c) **(1)** *Geben Sie eine Gleichung einer Stammfunktion G von g an und berechnen Sie den Energiebedarf der Familie für das Kalenderjahr.*

(2) Im Intervall [3; 9,5] wird der Leistungsbedarf der Familie zu jedem Zeitpunkt durch die Solaranlage gedeckt. Die den Bedarf übersteigende Leistung der Solaranlage soll in diesem Zeitraum zusätzlich zum Heizen eines Gartenpools genutzt werden.
Ermitteln Sie die Energie, die zum Heizen des Gartenpools im Intervall [3; 9,5] *zur Verfügung steht.*

(3) *Skizzieren Sie in der Abbildung die Fläche, welche durch den Zähler des folgenden Bruches bestimmt wird, und interpretieren Sie das Ergebnis der folgenden Berechnung im Sachzusammenhang.*

$$\frac{\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_3^{9,5} \big(f(t) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t}{\int_0^{12} g(t)\,\mathrm{d}t} \approx 0{,}575$$

(6 + 6 + 6 Punkte)



Abbildung

LÖSUNGEN HT 2

Aufgabe a)

Eine Familie will ihren Bedarf an Wärmeenergie …

> HINWEIS Sie müssen hier die Funktionsgleichungen der beiden Funktionen näher betrachten. Welche Bedeutung hat der Funktionswert an der Stelle $t = 0$? Was gilt an den Schnittpunkten der Funktionsgraphen?

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Sie müssen die Gleichung vierten Grades in (3) nicht lösen, aber führen Sie die nötigen Umformungen und Rechnungen jeweils konzentriert und ggf. unter Angabe von Zwischenschritten durch.
3.	Formulieren Sie jeweils einen kurzen und präzisen Antwortsatz.

Stichpunktlösung

(1) Vergleich der Graphen:

Die Graphen für Leistungsangebot und -bedarf sind schlecht aufeinander abgestimmt: Das Angebot hat im Sommer ein Maximum und im Winter ein Minimum, beim Bedarf ist es gerade umgekehrt. Die beiden Graphen sind weiterhin *fast* spiegelsymmetrisch bezüglich einer Geraden $y = 1000$. Bei genauerem Hinsehen erkennt man aber, dass Minimum und Maximum des Leistungsbedarfs etwas nach rechts gegenüber den Extrema des Angebots verschoben sind. Dies liegt an der „Wärmeträgheit" der Erde: Im Juni muss man manchmal noch heizen, weil im Wärmespeicher Erdboden (sowie dem unser Wetter mitbestimmenden Atlantik) die Winter- und Frühjahrskälte noch nicht ganz verschwunden sind, im Dezember gibt es entsprechend noch etwas Restwärme aus Spätsommer und Herbst.

(2) Verhältnis der Neujahrswerte (*y*-Achsenabschnitte):

$$\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{400}{2053} \approx 0{,}195 = 19{,}5\,\%$$

In der Neujahrsnacht ($t = 0$) beträgt das Leistungsangebot nur knapp ein Fünftel des Bedarfs, der Rest muss also aus einer anderen Wärmequelle kommen.

(3) Schnittpunkte der Funktionsgraphen:

$$f(t) = g(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400 = -t^4 + 26t^3 - 167{,}5t^2 - 12{,}5t + 2053$$

$$\Leftrightarrow \quad 2t^4 - 50t^3 + 311{,}5t^2 + 12{,}5t - 1653 = 0$$

Durch Einsetzen bestätigt man, dass $t = 3$ und $t = 9{,}5$ diese Gleichung lösen. (Zwischen Anfang März und Mitte September ist demnach *mehr* Leistung da, als benötigt wird.)

Aufgabe b)

> **HINWEIS** Jetzt geht es um das zentrale Thema der Kurvendiskussion: Auffinden und Diskutieren von Extrem- und Wendestellen. Welche Bedingungen sind notwendig, welche hinreichend?

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Wenden Sie beim Ableiten die Regeln für Summen und Potenzausdrücke (mit der Variablen als Basis) an.
3.	Führen Sie die Lösung der kubischen Gleichung durch Fallunterscheidung auf das Lösen einer quadratischen zurück.
4.	Klären Sie, ob Ihre Lösungen Teil der Definitionsmenge sind und ob sie zu einem Maximum oder einem Minimum gehören.
5.	Formulieren Sie jeweils einen kurzen und präzisen Antwortsatz.

Stichpunktlösung

(1) Maximum von *f*:

$f(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2 + 400$

$f'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$

$f''(t) = 12t^2 - 144t + 288$

Nullstelle der ersten Ableitung (notwendiges Kriterium):

$$f'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \vee \quad t^2 - 18t + 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad t = 0 \quad \vee \quad t = 9 \pm \sqrt{81 - 72}$$

f wird bei $x = 0$, $x = 6$ und $x = 12$ extrem. Man sieht aus der Grafik oder rechnet mit der Funktionsgleichung der zweiten Ableitung (hinreichendes Kriterium) aus, dass bei $x = 6$ ein *Maximum* und bei den beiden anderen Extrema ein *Minimum* von *f* vorliegt.
Berechnung des Maximalwerts: $f(6) = 1696$, also $H(6\,|\,1696)$

(2) Minimum der ersten Ableitung (Wendestelle) von *g*:

Die erste Ableitung gibt die Änderungsrate der Funktion an, die zweite Ableitung die Änderungsrate der ersten. Die größte Abnahme der Funktion entspricht einem Minimum der ersten Ableitung. Die größte Abnahme der ersten Ableitung ist entsprechend ein Minimum der zweiten:

$g(t) = -t^4 + 26t^3 - 167{,}5t^2 - 12{,}5t + 2053$

$g'(t) = -4t^3 + 78t^2 - 335t - 12{,}5$

$g''(t) = -12t^2 + 156t - 335$

Nullstelle der zweiten Ableitung:

$$g''(t) = 0 \quad \Leftrightarrow t^2 - 13t + \frac{335}{12} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{43}{3}}$$

Die Nullstellen von g'' sind die möglichen Wendestellen von g und liegen bei $t \approx 2{,}71$ und bei $t \approx 10{,}28$ [Monate]. Man sieht aus der Grafik oder rechnet mit der Funktionsgleichung der ersten Ableitung aus, dass bei $t \approx 2{,}71$ [Monate] der Leistungsbedarf der Familie am stärksten abnimmt.

Aufgabe c)

Durch das Integral …

> HINWEIS Hier ist jetzt Integrationskunst gefragt. Wie ist das bestimmte Integral definiert, wie wird es berechnet, wie sind die Lösungen zu interpretieren? Was muss man integrieren, um die Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen zu berechnen?

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Wenden Sie beim Integrieren die Regeln für Summen und Potenzausdrücke (mit der Variablen als Basis) an und wählen Sie passende Integrationsgrenzen.
3.	Formulieren Sie jeweils einen kurzen und präzisen Antwortsatz.

Stichpunktlösung

(1) Stammfunktion von *g* und bestimmtes Integral:

$$\int g(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{5}t^5 + \frac{13}{2}t^4 - \frac{335}{6}t^3 - \frac{25}{4}t^2 + 2053t$$

$$\int_0^{12} g(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{5}t^5 + \frac{13}{2}t^4 - \frac{335}{6}t^3 - \frac{25}{4}t^2 + 2053t\right]_0^{12}$$
$$= 12\,273{,}6$$

Der Jahresbedarf beträgt 12 273,6 kWh.

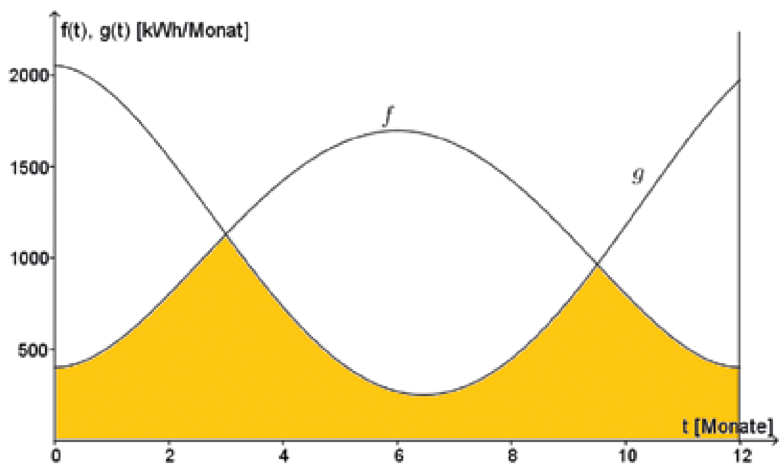
(2) Fläche zwischen den Graphen von *g* und *f* im Sommerhalbjahr:

Die gesuchte Fläche bzw. Energie E entspricht dem Integral über die Differenz der Funktionsterme von Angebot und Bedarf in den Grenzen der beiden Schnittpunkte:

$$E = \int_3^{9,5} \big(f(t) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_3^{9,5} \big(2t^4 - 50t^3 + 311{,}5t^2 + 12{,}5t - 1653\big)\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{25}{2}t^4 + \frac{623}{6}t^3 + \frac{25}{4}t^2 - 1653t\right]_3^{9,5}$$
$$\approx 6037{,}2$$

Über das Sommerhalbjahr stehen etwa 6037,2 kWh für den Pool zur Verfügung.

(3) Interpretation des „Integralbruchs“:



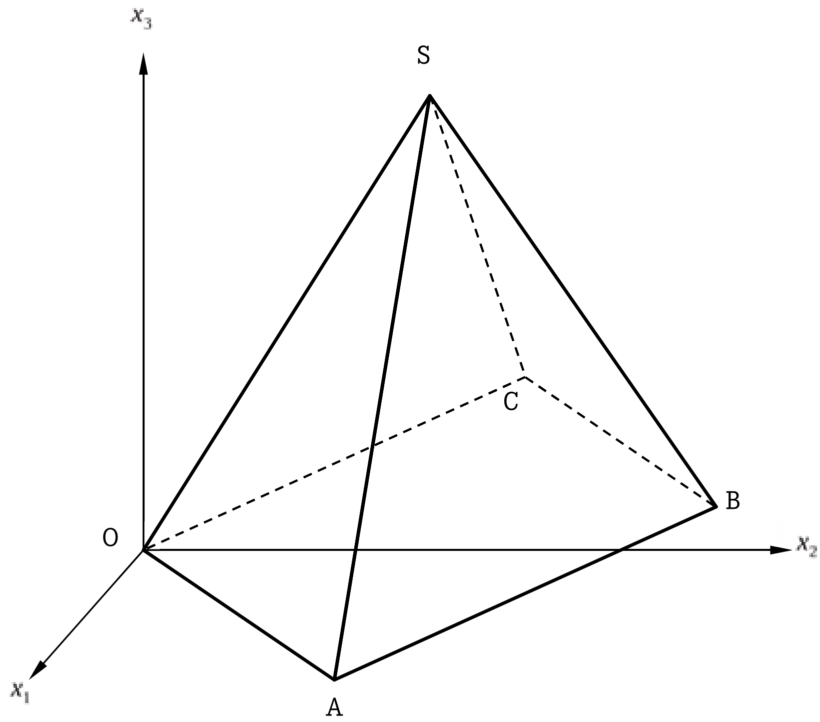
Die Fläche bzw. Energie im Zähler entspricht dem Anteil des solaren Energieangebots, der für Wohnraumbeheizung und Warmwasserbereitung (und nicht für den Pool) verwendet wird. Anders ausgedrückt ist dies der Anteil, der nicht den Bedarf übersteigt und anderweitig genutzt werden könnte (bzw. sollte).

Das Verhältnis bzw. der Bruch drückt aus, welcher Anteil der solaren Energieeinstrahlung übers Jahr für Heizung und Warmwasser benutzt wird (genutztes Angebot durch gesamtes Angebot), es sind 57,5 %, also immerhin mehr als die Hälfte.

PRÜFUNGSTEIL HT 3

Aufgabenstellung

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $O(0|0|0)$, $A(9|12|0)$, $B(-3|21|0)$, $C(-12|9|0)$ und $S(-1{,}5|10{,}5|15)$ Eckpunkte der Pyramide *OABCS*, deren Grundfläche das Viereck *OABC* ist (siehe *Abbildung*).



Abbildung

Im Folgenden darf verwendet werden, dass die Seitendreiecke der Pyramide zueinander kongruent sind.

a) **(1)** *Zeigen Sie, dass das Viereck OABC ein Quadrat ist.*

(2) *Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche der Pyramide OABCS.*

(6 + 8 Punkte)

b) **(1)** *Zeigen Sie, dass der Punkt* $R(5|15|0)$ *auf der Strecke* $\overline{AB}$ *liegt.*

(2) *Zeigen Sie, dass die Strecke* $\overline{OR}$ *die Grundfläche der Pyramide im Verhältnis* 5:1 *bzw.* 1:5 *teilt.*

(3) *Leiten Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene E her, die durch die Punkte O, Q*(1 | 1 | 2) *und R festgelegt ist.*
[Mögliches Ergebnis: E: $3x_1 - x_2 - x_3 = 0$]

(3 + 5 + 7 Punkte)

c) **(1)** *Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes P der Geraden g durch S und A mit der Ebene E aus Aufgabe b) (3).*
[Zur Kontrolle: Der Schnittpunkt ist $P(5{,}5 \mid 11{,}5 \mid 5)$.]

(2) *Weisen Sie nach, dass die Strecken $\overline{OP}$ und $\overline{BP}$ senkrecht zur Geraden g verlaufen.*

(3) *Begründen Sie, dass der Streckenzug $\overline{OPB}$ ein kürzester Weg von O nach B über den Mantel der Pyramide (Mantel: Oberfläche ohne Grundfläche) ist, und berechnen Sie die Länge des Streckenzuges.*

(4) Es gibt einen weiteren Streckenzug $\overline{ONB}$ ($N \neq P$), der ein kürzester Weg von O nach B über den Mantel der Pyramide ist.

Begründen Sie diese Aussage und beschreiben Sie die Lage des Punktes N.

(6 + 4 + 6 + 5 Punkte)

LÖSUNGEN HT 3

Aufgabe a)

In einem kartesischen Koordinatensystem ...

> HINWEIS Sie müssen einerseits Ihr Mittelstufenwissen über Pyramiden mit quadratischer Grundfläche aktivieren und andererseits Punkte und Seiten der Pyramide durch Vektoren bzw. Differenzvektoren darstellen und damit rechnen können.

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Stellen Sie die grundlegenden geometrischen Bedingungen bzw. Formeln auf.
3.	Eine Skizze hilft, den Überblick zu bewahren.
4.	Berechnen Sie aus den Koordinaten der Ortsvektoren die Vektoren der benötigten Seiten und Höhen und setzen Sie diese in die entsprechenden Formeln ein.
5.	Berechnen Sie die Ausdrücke.

Stichpunktlösung

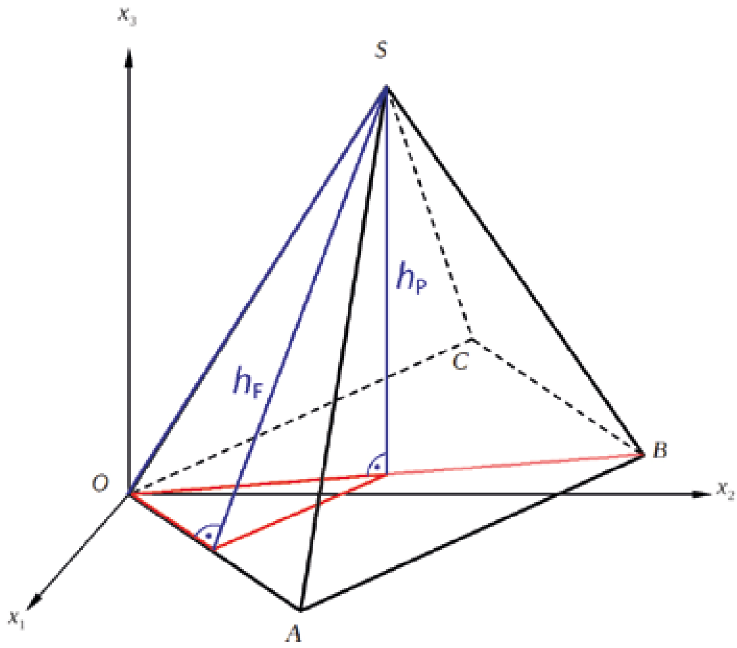
(1) Zeigen, dass die Grundfläche ein Quadrat ist:

Die Seitenflächen sind nach Aufgabenstellung kongruent, also müssen alle Seiten der Grundfläche gleich lang sein, deswegen ist das Viereck (mindestens) eine Raute (ein Rhombus). Jetzt muss man nur noch zeigen, dass das Viereck drei rechte Winkel hat (wegen des Winkelsummensatzes beträgt dann auch der vierte Winkel 90°). Dies bestätigen Sie, indem Sie zeigen, dass das Skalarprodukt von drei Paaren benachbarter Seiten jeweils verschwindet:

$$\left(\vec{B}-\vec{A}\right)\cdot\left(\vec{O}-\vec{A}\right)=\begin{pmatrix}-12\\9\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-9\\-12\\0\end{pmatrix}=0;\quad \left(\vec{A}-\vec{O}\right)\cdot\left(\vec{C}-\vec{O}\right)=\begin{pmatrix}9\\12\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-12\\9\\0\end{pmatrix}=0$$

$$\left(\vec{O}-\vec{C}\right)\cdot\left(\vec{B}-\vec{C}\right)=\begin{pmatrix}12\\-9\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9\\12\\0\end{pmatrix}=0$$

(2) Volumen und Oberfläche der Pyramide:



Mit der Pyramidenhöhe h_P, der Grundfläche A, der Seitenfläche F und der Höhe des Seitenflächendreiecks h_F stellt man zunächst die bekannten Formeln für Volumen und Oberfläche der Pyramide auf („Grundfläche mal Höhe durch 3“ sowie „Grundfläche plus Mantelfläche“):

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h_P = \frac{1}{3} \cdot \vec{A}^2 \cdot h_P$$

$$\text{Oberfläche} = 4 \cdot F + A = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \left| \vec{A} \right| \cdot h_F \right) + \vec{A}^2$$

Die beiden noch fehlenden Höhen können Sie mit dem Pythagoras-Satz ausrechnen:

$$h_P = \sqrt{\vec{S}^2 - \left(\frac{1}{2} \vec{B} \right)^2} = \sqrt{337{,}5 - 112{,}5} = 15$$

$$h_F = \sqrt{\vec{S}^2 - \left(\frac{1}{2} \vec{A} \right)^2} = \sqrt{337{,}5 - 56{,}25} \approx 16{,}77$$

(Beachten Sie, dass $h_P = \left| \vec{A} \right|$ ist: Die Höhe der Pyramide entspricht der Seitenlänge der Grundfläche!)

Daraus ergibt sich dann:

$$\text{Volumen} = \frac{1}{3} \cdot \vec{A}^3 = 1125$$

$$\text{Oberfläche} = 2 \cdot \left| \vec{A} \right| \cdot h_F + \vec{A}^2 \approx 728{,}1$$

Aufgabe b)

> HINWEIS Auch hier müssen Sie wieder geeignete geometrische Beziehungen mithilfe der Ortsvektoren ausdrücken. In der dritten Teilaufgabe folgt die Rechnung dem Standardverfahren. Allerdings hilft es, Aufpunkt und Richtungsvektoren so auszuwählen, dass die Rechnung besonders übersichtlich wird.

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Stellen Sie in (1) und (2) die grundlegenden geometrischen Bedingungen bzw. Formeln auf und treffen Sie für (3) eine sinnvolle Wahl des Aufpunkts und der Richtungsvektoren.
3.	Eine Skizze hilft, den Überblick zu bewahren.
4.	Berechnen Sie die Ausdrücke.

Stichpunktlösung

(1) Zeigen, dass *R* auf der Strecke *AB* liegt:

Damit der Punkt R auf der Strecke AB liegt, muss erstens sein Ortsvektor Element der Geraden durch die Punkte A und B sein $\left(\left(\vec{R}-\vec{A}\right) \parallel \left(\vec{B}-\vec{A}\right)\right)$. Zweitens muss R auf dieser Geraden zwischen diesen beiden Punkten liegen, was sich durch den Vergleich der Beträge der Differenzvektoren bestätigen lässt (der Abstand von R zu A und B muss jeweils kleiner sein als der Abstand von A zu B: $\left(\left|\vec{R}-\vec{A}\right| < \left|\vec{B}-\vec{A}\right|;\quad \left|\vec{R}-\vec{B}\right| < \left|\vec{B}-\vec{A}\right|\right)$.

- Parallelität: $\left(\vec{R}-\vec{A}\right)\times\left(\vec{B}-\vec{A}\right) = \begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-12\\9\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
- Vergleich der Beträge: $\left|\vec{R}-\vec{A}\right| = 5;\quad \left|\vec{R}-\vec{B}\right| = 10;\quad \left|\vec{B}-\vec{A}\right| = 15$

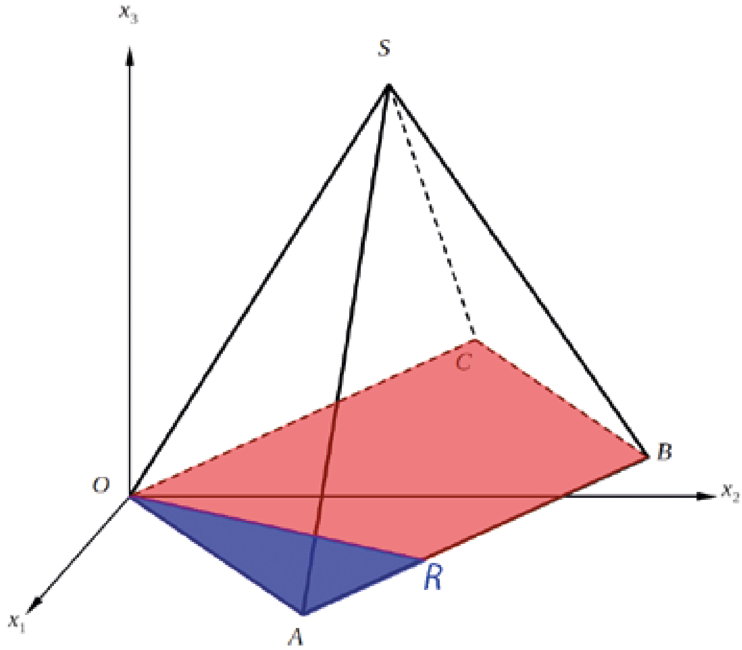
(Ein alternativer Ansatz wäre es, die Geradengleichung in Parameterform aufzustellen.)

(2) Größe des Dreiecks *OAR*:

Für die Fläche von OAR gilt „Grundseite mal Höhe durch 2“. Da das Dreieck rechtwinklig ist, ist die Kathete AR die Höhe über der anderen Kathete A. Da außerdem aus der letzten Aufgabe hervorgeht, dass R die Strecke AB drittelt, bekommt man:

$$A_{OAR} = \frac{1}{2}\left|\vec{R}-\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{A}\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\vec{A}\right|^2$$

Damit ist tatsächlich das Grundflächenquadrat sechsmal so groß wie *OAR* und die Fläche des Dreiecks *OAR* verhält sich zur Fläche des „Restvierecks" *RBCO* wie 1:5.



(3) Ebenengleichung:

Mit dem Ursprung als Aufpunkt und *Q* und *R* als Richtungsvektoren erhält man die Ebenengleichung in Parameterform:

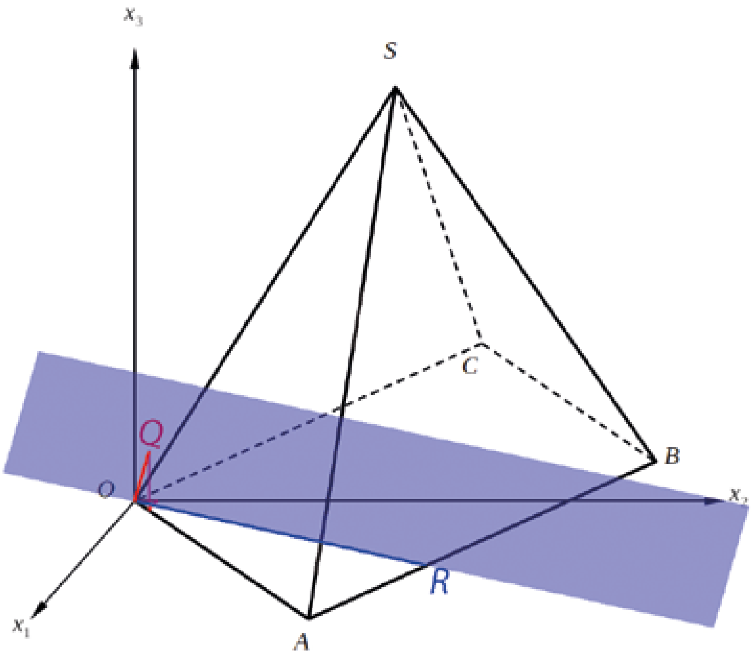
$$E: \quad \vec{x} = \vec{O} + s \cdot \vec{R} + t \cdot \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix}$

Übersichtlicher wird es mit dem skalierten Normalenvektor (3 | −1 | −1). Zunullsetzen des Skalarprodukts aus dem Normalenvektor und dem Differenzvektor $\vec{x}$ – Aufpunkt ergibt die Ebenengleichung in Koordinatenform:

$$E: \quad \vec{n}\cdot\left(\vec{x}-\vec{O}\right)=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad 3x_1-x_2-x_3=0$$



Aufgabe c)

> HINWEIS Das Gleichsetzen von Geraden- und/oder Ebenengleichungen in Parameterform führt auf lineare Gleichungssysteme, für deren Lösung ein sinnvolles Standardverfahren anzuwenden ist. Auch die zweite Teilaufgabe ist eine Standardrechnung, aus der in der dritten und der vierten Teilaufgabe Folgerungen gezogen weden, die etwas räumliches Vorstellungsvermögen erfordern.

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	In den ersten beiden Teilaufgaben wenden Sie die Standardverfahren für das Gleichsetzen von Gleichungen in Parameterform bzw. das Berechnen von Skalarprodukten an.
3.	In den beiden übrigen Teilaufgaben ist eine Skizze wesentlich. Argumentieren Sie mit der zuvor ermittelten Orthogonalität sowie den Symmetrieeigenschaften der Pyramide.

Stichpunktlösung

(1) Schnittpunkt *P* der Pyramidenkante *AS* mit der Ebene durch *O*, *Q* und *R*:

Die zur Pyramidenkante parallele Gerade g durch S und A hat die Gleichung

$$g: \quad \vec{x} = \vec{A} + \lambda \cdot \left(\vec{A} - \vec{S}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10{,}5 \\ 1{,}5 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Am gesuchten Schnittpunkt P müssen sowohl die Geraden- als auch die Ebenengleichung erfüllt sein:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 10{,}5 \\ 1{,}5 \\ -15 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir müssen also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5s \quad +t \quad -10{,}5\lambda &= 9 \\ 15s \quad +t \quad -1{,}5\lambda &= 12 \\ +2t \quad +15\lambda &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Auflösen der dritten Gleichung nach t und Einsetzen in die beiden anderen ergibt:

$$\begin{aligned} 5s \quad -18\lambda &= 9 \\ 15s \quad -9\lambda &= 12 \end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich $\lambda = -1/3$; $t = 2{,}5$; $s = 0{,}6$ und daraus $P(5{,}5\,|\,11{,}5\,|\,5)$.

(2) Orthogonalität von *OP* und *BP* zur Gerade *g*:

$$\left(\vec{O}-\vec{P}\right)\cdot\left(\vec{A}-\vec{S}\right)=\begin{pmatrix}-5{,}5\\-11{,}5\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10{,}5\\1{,}5\\-15\end{pmatrix}=0;\quad \left(\vec{B}-\vec{P}\right)\cdot\left(\vec{A}-\vec{S}\right)=\begin{pmatrix}-8{,}5\\9{,}5\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10{,}5\\1{,}5\\-15\end{pmatrix}=0$$

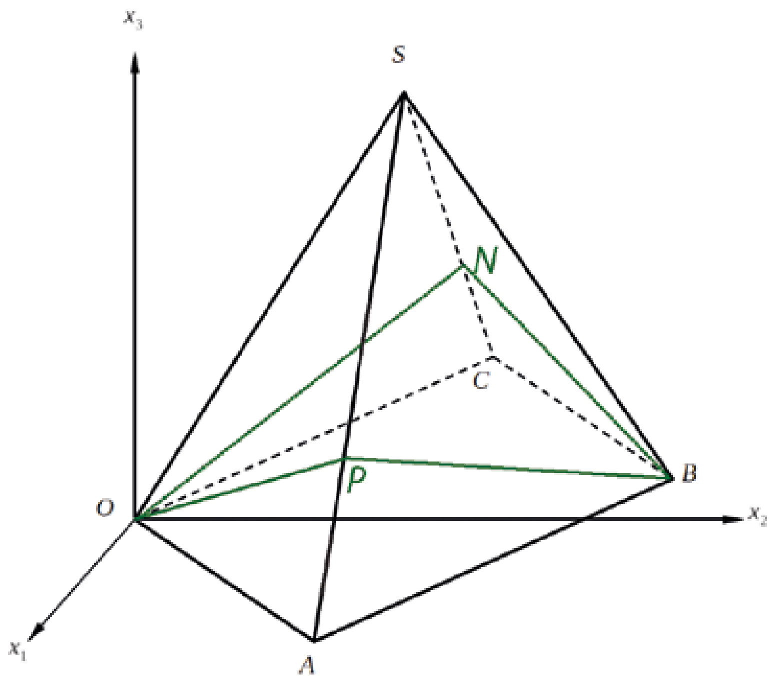
(3) Kürzester Weg auf der Mantelfläche:

Da *OP* senkrecht auf *AS* steht, ist es der senkrechte und damit kürzeste Abstand des Ursprungs von der Geraden *g*. Aus demselben Grund ist *BP* der kürzeste Abstand von Punkt *B* zur Geraden *g*. Darum kann es auf der Mantelfläche keinen kürzeren Weg von *O* über einen Punkt auf der Kante *AS* nach *B* geben als den über *P*.
Da beide Wegstrecken wegen der Kongruenz der Seitenflächen gleich lang sein müssen, beträgt die Länge des Wegs einfach:

$$\left|\vec{O}-\vec{P}\right|+\left|\vec{B}-\vec{P}\right|=2\left|\vec{P}\right|=2\sqrt{\frac{375}{2}}=5\sqrt{30}\approx 27{,}4$$

(4) Weg *ONB:*

Wenn man über den Punkt *N* auf der *AS* gegenüberliegenden „hinteren“ Kante *CS* läuft, ist der Weg aus Symmetriegründen genau der gleiche wie „vorne herum“ über *P*. (*N* ist das Spiegelbild von *P* bezüglich der durch das Dreieck *OBS* aufgespannten „Diagonalebene“ durch die Pyramide.)



PRÜFUNGSTEIL HT 4

Aufgabenstellung

Im Folgenden betrachten wir die Entwicklung von Wolfspopulationen. Dabei beschränken wir uns **ausschließlich** auf die **weiblichen** Mitglieder einer Population, die aus Welpen (w), jungen Fähen (j) sowie ausgewachsenen Fähen (a) bestehen soll. Alle Fähen sind vermehrungsfähig. Die Welpen entwickeln sich ein Jahr nach der Geburt zu jungen Fähen und ein Jahr später zu ausgewachsenen Fähen.

Die folgende *Tabelle* zeigt die Verteilung einer in der Wildnis lebenden Population für die Jahre 2013 und 2014:

	2013	2014
w	65	52
j	8	26
a	20	16

Tabelle

Modellhaft lässt sich die Entwicklung mit der Matrix A beschreiben:

$$\begin{array}{ll} & \text{von:}\quad w \quad j \quad a \\ \text{nach:} & \\ \begin{array}{c} w \\ j \\ a \end{array} & A = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) **(1)** *Begründen Sie mit den Daten aus der Tabelle, dass* $b = 0{,}4$ *gilt.*

(2) *Interpretieren Sie die weiteren von Null verschiedenen Einträge in der Matrix A im Sachzusammenhang.*

(3 + 4 Punkte)

b) **(1)** *Berechnen Sie die Verteilungen, die nach diesem Modell in den Jahren 2015 und 2016 zu erwarten sind.*

(2) *Bestimmen Sie die Verteilung, die nach diesem Modell im Jahr 2012 vorgelegen hätte.*

(3) *Zeigen Sie, dass sich in diesem Modell die Population aus 2011 nicht bestimmen lässt.*

(4) Ein Biologe behauptet, dass weniger als 15 % aller Welpen mindestens ein Alter von drei Jahren erreichen.

Prüfen Sie, ob nach der obigen Modellierung mit der Matrix A die Behauptung des Biologen zutrifft.

(4 + 5 + 3 + 4 Punkte)

c) Wölfe, die in einem Tierpark leben, haben andere Überlebens- und Fortpflanzungsraten. Für einen Tierpark kann die Entwicklung seiner Wolfspopulation durch die folgende Matrix B modelliert werden:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

(1) *Beschreiben Sie im Sachzusammenhang die Einträge in der zweiten Spalte der Matrix B im Vergleich zu den Einträgen in der zweiten Spalte der Matrix A.*

(2) Wegen der räumlichen Beschränkung will die Tierparkleitung die Gesamtzahl der Wölfe konstant halten. Das soll durch eine strikte Geburtenkontrolle gewährleistet werden.

Zeigen Sie, dass eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *verschiedene stationäre Verteilung existiert, d. h. eine Verteilung, die sich innerhalb eines Jahres nicht ändert.*

(3) *Ermitteln Sie die kleinstmögliche Gesamtpopulation mit stationärer Verteilung* $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *mit natürlichen Zahlen* n_1, n_2 *und* n_3.

(2 + 7 + 4 Punkte)

d) Für die Population in dem obigen Tierpark wird eine neue Modellierung gewählt: Die Entwicklungsstufe der Welpen wird mit der Überlebensrate von 80 % beibehalten, die Entwicklungsstufen der jungen Fähen und ausgewachsenen Fähen werden zu einer Stufe zusammengefasst. Die neue Modellierung soll durch die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & g \\ 0{,}8 & h \end{pmatrix}$$

mit $g > 0$ und $0 \leq h < 1$ dargestellt werden. Die Population der Welpen und Fähen soll mit insgesamt 19 Tieren konstant bleiben.

(1) *Zeigen Sie, dass in dem neuen Modell eine stationäre Verteilung mit 11 Welpen nicht vorkommen kann.*

(2) *Zeigen Sie, dass sich für* $g = \frac{5}{14}$ *und* $h = \frac{5}{7}$ *eine stationäre Verteilung mit 5 Welpen und 14 Fähen ergibt.*

(3) Mit den Werten aus (2) ist $C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{14} \\ 0{,}8 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$. Ein Taschenrechner liefert z. B.

$$C^{17} = \begin{pmatrix} 0{,}2222222218 & 0{,}2777777779 \\ 0{,}6222222226 & 0{,}7777777777 \end{pmatrix}.$$

Die Potenzen C^n der Matrix C streben mit wachsendem n gegen die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{28}{45} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Matrix G lässt sich die langfristige Entwicklung einer Population ermitteln.

Leider fallen in einem Jahr alle fünf Welpen der Population einer Infektionskrankheit zum Opfer. Daraufhin beschließt die Tierparkleitung die Anschaffung von vier zusätzlichen Fähen.

Ermitteln Sie die langfristige Entwicklung der neuen Population.

(7 + 2 + 5 Punkte)

LÖSUNGEN HT 4

Aufgabe a)

Im Folgenden betrachten wir die Entwicklung …

> HINWEIS Die ganze Aufgabenstellung HT 4 beruht auf dem Konzept von Zufallsvektoren und Übergangsmatrizen. Machen Sie sich zunächst klar, wofür die Komponenten der Vektoren und die Matrizeneinträge jeweils im Modell stehen. Dann müssen Sie „nur“ noch die einzelnen Fragestellungen korrekt in Vektor-Matrix-Sprache übertragen und die Multiplikationen der Vektoren und/oder Matrizen sauber ausführen.

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Überlegen Sie sich, welche Übergänge überhaupt möglich sind – wie wir selbst werden auch die Wölfinnen nicht jünger, sondern jedes Jahr genau ein Jahr älter.

Stichpunktlösung

(1) Überlebenschancen der Welpen:

Die Zahl *b* gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Welpe von 2013 im Jahr 2014 eine junge Fähe ist.

2014 gab es 26 junge Fähen, ein Jahr vorher 65 Welpen, der Quotient aus beiden Zahlen ist gerade $26 : 65 = 0{,}4$.

(2) Übrige Matrixeinträge:

Der erste Zeilenvektor gibt an, wo neue Welpen herkommen: Sie werden entweder von jungen oder von alten Fähen geboren (aber nicht von weiblichen Welpen!). Nach den Daten der Tabelle bringt jede junge Fähe im Schnitt 1,5 Welpen pro Jahr auf die Welt, jede alte Fähe 2.

Der dritte Zeilenvektor gibt dagegen die Überlebenschancen der jungen und alten Fähen an: 50 % der jungen Fähen sind im nächsten Jahr alte Fähen (und nicht tot), 60 % der alten Fähen sind im nächsten Jahr noch am Leben und damit alte Fähen geblieben. (Welpen können nicht direkt in alte Fähen „übergehen“; erst recht nicht können sie Welpen bleiben, da sie immer entweder junge Fähen werden oder sterben.)

Aufgabe b)

> HINWEIS Nun geht es um Matrizenmultiplikation und um den „Kehrwert" bzw. die Inverse einer Matrize. Letztere lässt sich mit den in den meisten Bundesländern erlaubten Taschenrechnern berechnen – es lohnt sich, ggf. noch einmal in der Betriebsanleitung nachzuschauen.

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Multiplizieren Sie den Ausgangsvektor mit der passenden Potenz von *A* bzw. der Inversen von *A*, um die vom Modell vorausgesagte Verteilung im jeweils gefragten Jahr zu erhalten.
3.	Beachten Sie beim Formulieren Ihrer Antwort, dass (lebendige) Wölfinnen immer „am Stück", und nicht in Dezimalbruchteilen auftreten.

Stichpunktlösung

(1) Verteilungen für 2015 und 2016:

Wenn X_{2014} den Verteilungsvektor für 2014 bezeichnet, dann haben wir

$$X_{2015} = A \cdot X_{2014} = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 52 \\ 26 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 20{,}8 \\ 22{,}6 \end{pmatrix}$$

$$X_{2016} = A \cdot X_{2015} = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 71 \\ 20{,}8 \\ 22{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76{,}4 \\ 28{,}4 \\ 23{,}96 \end{pmatrix}$$

(Natürlich gilt auch die Beziehung $X_{2016} = A^2 \cdot X_{2014}$.)
Es gibt im Jahr 2016 laut Modell *A* 76 Welpen, 28 junge und 23 alte Fähen.

(2) Verteilung für 2012:

Hierfür muss die Inverse der Matrix *A* berechnet und dann mit X_{2013} multipliziert werden:

$$X_{2012} = A^{-1} \cdot X_{2013} = \begin{pmatrix} 0 & 2{,}5 & 0 \\ -6 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & -15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 65 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}$$

2012 gab es 20 Welpen, 10 junge und 25 alte Fähen.

(3) Verteilung für 2011:

$$X_{2011} = A^{-1} \cdot X_{2012} = \begin{pmatrix} 0 & 2{,}5 & 0 \\ -6 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & -15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 380 \\ -275 \end{pmatrix}$$

Diese Werte sind offenkundig unsinnig: Die Zahl der alten Fähen kann nicht negativ werden, und der Wert 380 für die jungen Fähen ist zumindest unnatürlich hoch.

(4) Verteilung nach drei Jahren:

Die Matrixpotenz A^3 gibt an, wie die Verteilung drei Jahre nach einem Zeitpunkt *t* aussieht:

$$X_{t+3} = A^3 \cdot X_t; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 1{,}5 & 1{,}92 \\ 0{,}24 & 0{,}4 & 0{,}48 \\ 0{,}12 & 0{,}48 & 0{,}616 \end{pmatrix}$$

Der erste Wert in der dritten Zeile gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Welpe drei Jahre später ein (lebendiges) Alttier ist. Er beträgt 0,12 = 12 % und damit weniger als die behaupteten 15 %.

Aufgabe c)

Wölfe, die in einem Tierpark leben …

> HINWEIS Hier ist das Konzept des Eigenvektors von zentraler Bedeutung, also eines Vektors, der sich bei Multiplikation mit einer gegebenen Matrix nicht verändert oder maximal um einen Faktor (den Eigenwert) skaliert, d. h. vergrößert oder verkleinert, wird. Sie sollten wissen, wann solch ein Vektor existiert und wie man Eigenvektoren und Eigenwerte bestimmen kann.

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Die Existenz eines vom Nullvektor verschiedenen Eigenvektors zeigen Sie dadurch, dass Sie die Existenz einer nichttrivialen Lösung eines Gleichungssystems beweisen (Stichwort Determinante). Das Gleichungssystem erhalten Sie durch formales „Auflösen“ der Matrixgleichung für den stationären Zufallsvektor.
3.	Achten Sie auch hier wieder darauf, dass (lebendige) Wölfinnen immer „am Stück“, und nicht in Dezimalbruchteilen auftreten.

Stichpunktlösung

(1) Spalte der jungen Fähen im Tierpark-Modell *B*:

Im Tierpark bekommt eine junge Fähe im Schnitt nur einen Welpen pro Jahr, überlebt aber dafür dieses Jahr mit einer Chance von 75 %. Natürlich können auch im Tierpark Wölfinnen nicht zwei Jahre lang ein Jahr alt sein oder statt Welpen direkt junge Fähen gebären, deshalb ist der mittlere Wert der zweiten Spalte auch hier 0.

(2) Existenz eines nichttrivialen Eigenvektors von *B*:

Eine stationäre Verteilung muss ein nichttrivialer (vom Nullvektor verschiedener) Eigenvektor der Matrix *B* zum Eigenwert 1 sein:

$$B \cdot X^{\text{stat}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{\text{w}}^{\text{stat}} \\ X_{\text{j}}^{\text{stat}} \\ X_{\text{a}}^{\text{stat}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{\text{w}}^{\text{stat}} \\ X_{\text{j}}^{\text{stat}} \\ X_{\text{a}}^{\text{stat}} \end{pmatrix} = X^{\text{stat}}$$

bzw.

$$\left(B - \lambda \cdot \mathbf{1}\right) \cdot X^{\text{stat}} = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda = 1$$

(**1** ist die Einheitsmatrix.) Eine von 0 verschiedene Lösung dieses Gleichungssystems gibt es *genau dann*, wenn

$$\det(B - \mathbf{1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & -0{,}3 \end{pmatrix} = -0{,}3 + 0{,}06 + 0{,}24 = 0$$

Da die Determinante tatsächlich verschwindet, gibt es mindestens einen nichttrivialen Eigenvektor und damit mindestens eine stationäre Verteilung.

(3) Kleinster Eigenvektor von *B* zum Eigenwert 1:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}75 & -0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{\text{w}}^{\text{stat}} \\ X_{\text{j}}^{\text{stat}} \\ X_{\text{a}}^{\text{stat}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rrrcl} -X_{\text{w}}^{\text{stat}} & X_{\text{j}}^{\text{stat}} & 0{,}1X_{\text{a}}^{\text{stat}} & = & 0 \\ 0{,}8X_{\text{w}}^{\text{stat}} & -X_{\text{j}}^{\text{stat}} & & = & 0 \\ & 0{,}75X_{\text{j}}^{\text{stat}} & -0{,}3X_{\text{a}}^{\text{stat}} & = & 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung (1 | 0,8 | 2). Da Wölfinnen aber, wie bereits mehrfach erwähnt, nur in ganzzahligen Mengen auftreten, muss man noch mit 5 multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} X_w^{stat} \\ X_j^{stat} \\ X_a^{stat} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe d)

Für die Population in dem obigen Tierpark …

> **HINWEIS** Hier müssen Sie zunächst eine Matrixgleichung aufstellen, bei der die beiden Unbekannten nicht im zweikomponentigen Verteilungsvektor, sondern in der Matrix stehen. Aber auch diese lässt sich in ein Gleichungssystem überführen. Machen Sie sich anschließend klar, dass die Grenzmatrix der Grenzwert einer Folge von Matrixpotenzen ist.

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Wenn Ihnen das Konzept der Grenzmatrix keinen Schrecken mehr bereitet, brauchen Sie nur noch die jeweiligen Gleichungen sauber aufzuschreiben und nachzurechnen.

Stichpunktlösung

(1) Unmöglichkeit einer stationären Verteilung mit 11 Welpen:

$$\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0{,}8 & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8g \\ 8{,}8+8h \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 8g \quad &= 11 \\ 8h &= -0{,}8 \end{aligned}$$

mit den formalen Lösungen $g = 11/8$ und $h = -0{,}1$. Negative h sind aber nicht zugelassen.

(2) Nachweis, dass 5 Welpen und 14 Fähen eine stationäre Verteilung sind:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{14} \\ \frac{4}{5} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{5}+\frac{70}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

(3) Grenzverteilung/-matrix:

Die neue Population besteht aus den 14 überlebenden und den 4 gekauften Fähen, also ist

$$X_{\text{neu, Start}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man dies mit der Grenzmatrix, ergibt sich

$$G \cdot X_{\text{neu, Start}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{5}{18} \\ \frac{28}{45} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Das bedeutet, dass sich auch die neue Startverteilung in die stationäre Verteilung mit 5 Welpen und 14 Fähen entwickeln wird.

PRÜFUNGSTEIL HT 5

Aufgabenstellung

Eine Firma stellt Bodenfliesen aus Keramik her. Damit eine Fliese als „1. Wahl" gilt, muss sie strenge Qualitätsnormen erfüllen. Alle anderen Fliesen werden als „2. Wahl" bezeichnet.

Eine Fliese ist erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}2$ „2. Wahl" (d. h. mit der Wahrscheinlichkeit von 0,8 „1. Wahl"), unabhängig von allen anderen Fliesen.

Jede Packung enthält 20 Fliesen.

a) **(1)** *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung genau vier „2. Wahl"-Fliesen enthalten sind.*

(2) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung mindestens 90 % der Fliesen die Qualität „1. Wahl" haben.*

(3) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung die Anzahl der „2. Wahl"-Fliesen höchstens um 2 von der erwarteten Anzahl abweicht.*

(2 + 3 + 4 Punkte)

b) Die 20 Fliesen einer Packung wurden in 4 Reihen mit jeweils 5 Fliesen verlegt.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\tilde{p}$ dafür, dass eine zufällig ausgewählte Reihe nur „1. Wahl"-Fliesen enthält.* [Kontrollergebnis $\tilde{p} = 0{,}32768$]

(2) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es mindestens eine Reihe gibt, die nur „1. Wahl"-Fliesen enthält.*

(3) In einer Reihe wurden sogar genau zwei Fliesen der Qualität „2. Wahl" verlegt. *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fliesen direkt nebeneinander liegen.*

(2 + 5 + 6 Punkte)

c) Für besonders anspruchsvolle Kunden soll eine Sorte „Premium" angeboten werden, die nur aus „1. Wahl"-Fliesen besteht.
Dazu will die Firma die „2. Wahl"-Fliesen aus der Produktion aussortieren. Für einen ersten Sortiervorgang wird ein Testgerät verwendet, das allerdings nicht immer optimal funktioniert:
Das Testgerät erkennt eine „2. Wahl"-Fliese mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 und sortiert sie aus. Andererseits wird eine „1. Wahl"-Fliese mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05 zu Unrecht als „2. Wahl" aussortiert.

(1) *Stellen Sie die Situation graphisch dar (mit einer Vierfeldertafel oder einem Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten).*
Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit der das Testgerät eine zufällig ausgewählte Fliese als „1. Wahl“ einstuft (also nicht aussortiert).

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Fliese, die bei der Prüfung nicht aussortiert wurde, in Wirklichkeit eine „2. Wahl“-Fliese ist.*

(8 + 4 Punkte)

d) Die Maschine, mit der die Fliesen hergestellt werden, wird neu eingestellt, da die „2. Wahl“-Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}2$ zu groß ist. Der Produktionsleiter möchte mit einem Test überprüfen, ob die neue Einstellung tatsächlich zu einer Verringerung des Ausschussanteils geführt hat. Er entnimmt daher der Tagesproduktion der neu eingestellten Maschine zufällig 100 Fliesen und lässt die Anzahl der „2. Wahl“-Fliesen in dieser Stichprobe bestimmen.

(1) *Ermitteln Sie einen geeigneten Hypothesentest (geben Sie geeignete Hypothesen an, begründen Sie die Wahl von H_0 und ermitteln Sie eine Entscheidungsregel) für die genannte Stichprobe von 100 Fliesen mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 %.*

(2) Die Wahrscheinlichkeit für „2. Wahl“-Fliesen wurde durch die neue Einstellung tatsächlich auf $p = 0{,}15$ gesenkt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ihre Entscheidungsregel aus (1) zu einer Fehlentscheidung führt.

(11 + 5 Punkte)

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Wenn die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - 1{,}64\,\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\,\sigma) \approx 0{,}90$	$P(\mu - 1{,}64\,\sigma \leq X) \approx 0{,}95$
	$P(X \leq \mu + 1{,}64\,\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 1{,}96\,\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\,\sigma) \approx 0{,}95$	$P(\mu - 1{,}96\,\sigma \leq X) \approx 0{,}975$
	$P(X \leq \mu + 1{,}96\,\sigma) \approx 0{,}975$
$P(\mu - 2{,}58\,\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\,\sigma) \approx 0{,}99$	$P(\mu - 2{,}58\,\sigma \leq X) \approx 0{,}995$
	$P(X \leq \mu + 2{,}58\,\sigma) \approx 0{,}995$

$P(\mu - 1\,\sigma \leq X \leq \mu + 1\,\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1\,\sigma \leq X) \approx 0{,}841$
	$P(X \leq \mu + 1\,\sigma) \approx 0{,}841$
$P(\mu - 2\,\sigma \leq X \leq \mu + 2\,\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 2\,\sigma \leq X) \approx 0{,}977$
	$P(X \leq \mu + 2\,\sigma) \approx 0{,}977$
$P(\mu - 3\,\sigma \leq X \leq \mu + 3\,\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 3\,\sigma \leq X) \approx 0{,}999$
	$P(X \leq \mu + 3\,\sigma) \approx 0{,}999$

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für n = 10 und n = 20

$$F(n;\, p;\, k) = B(n;\, p;\, 0) + \ldots + B(n;\, p;\, k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

						p						
n	*k*	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
						p						

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;\, p;\, k) = 1 -$ abgelesener Wert

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für n = 100

$$F(n;\,p;\,k) = B(n;\,p;\,0) + \ldots + B(n;\,p;\,k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p = 0,05	0,07	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3	0,4	k	n
	0	0,0059	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,0371	0,0060	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,1183	0,0258	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,2578	0,0744	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,4360	0,1632	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,6160	0,2914	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,7660	0,4443	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,8720	0,5988	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9369	0,7340	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9	0,9718	0,8380	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10	0,9885	0,9092	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11	0,9957	0,9531	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12	0,9985	0,9776	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13	0,9995	0,9901	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14	0,9999	0,9959	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15		0,9984	0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0033	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16		0,9994	0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0068	0,0010	0,0001	0,0000	83	
	17		0,9998	0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0133	0,0022	0,0002	0,0000	82	
	18		0,9999	0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0243	0,0045	0,0005	0,0000	81	
	19			0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0420	0,0089	0,0011	0,0000	80	
	20			0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0684	0,0165	0,0024	0,0000	79	
	21			0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,1057	0,0288	0,0048	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,1552	0,0479	0,0091	0,0001	77	
	23				0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,2172	0,0755	0,0164	0,0003	76	
	24				0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,2909	0,1136	0,0281	0,0006	75	
	25				0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,3737	0,1631	0,0458	0,0012	74	
	26				0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,4620	0,2244	0,0715	0,0024	73	
	27				0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,5516	0,2964	0,1066	0,0046	72	
	28				0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,6379	0,3768	0,1524	0,0084	71	
	29				0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,7172	0,4623	0,2093	0,0148	70	
100	30					0,9997	0,9939	0,8962	0,7866	0,5491	0,2766	0,0248	69	100
	31					0,9999	0,9969	0,9307	0,8446	0,6331	0,3525	0,0398	68	
	32						0,9984	0,9554	0,8909	0,7107	0,4344	0,0615	67	
	33						0,9993	0,9724	0,9261	0,7793	0,5188	0,0913	66	
	34						0,9997	0,9836	0,9518	0,8371	0,6019	0,1303	65	
	35						0,9999	0,9906	0,9697	0,8839	0,6803	0,1795	64	
	36						0,9999	0,9948	0,9817	0,9201	0,7511	0,2386	63	
	37							0,9973	0,9893	0,9470	0,8123	0,3068	62	
	38							0,9986	0,9940	0,9660	0,8630	0,3822	61	
	39							0,9993	0,9968	0,9790	0,9034	0,4621	60	
	40							0,9997	0,9983	0,9875	0,9341	0,5433	59	
	41							0,9999	0,9992	0,9928	0,9566	0,6225	58	
	42							0,9999	0,9996	0,9960	0,9724	0,6967	57	
	43								0,9998	0,9979	0,9831	0,7635	56	
	44								0,9999	0,9989	0,9900	0,8211	55	
	45									0,9995	0,9943	0,8689	54	
	46									0,9997	0,9969	0,9070	53	
	47									0,9999	0,9983	0,9362	52	
	48									0,9999	0,9991	0,9577	51	
	49										0,9996	0,9729	50	
	50										0,9998	0,9832	49	
	51										0,9999	0,9900	48	
	52											0,9942	47	
	53											0,9968	46	
	54			Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9983	45	
	55											0,9991	44	
	56											0,9996	43	
	57											0,9998	42	
	58											0,9999	41	
n		0,95	0,93	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	k	n
							p							

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;\,p;\,k) = 1 -$ abgelesener Wert

Tabelle 4: Normalverteilung

$\phi(z) = 0, \ldots$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2{,}32) = 0{,}9898$

$\phi(-0{,}9) = 1 - \phi(0{,}9) = 0{,}1841$

$\phi(z) = 0{,}994 \Rightarrow z = 2{,}51$

LÖSUNGEN HT 5

Aufgabe a)

Eine Firma stellt Bodenfliesen aus Keramik her …

> HINWEIS Die in dieser Aufgabe gesuchten Wahrscheinlichkeiten werden alle über die Binomialverteilung berechnet. Wichtig ist, sicher zwischen „genau gleich", „mindestens" und „höchstens" zu unterscheiden und außerdem den Unterschied zwischen „≤" und „<" zu beachten.

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Bestimmen Sie die Parameter n, p und q (= 1 – p) der Binomialverteilung.
3.	Klären Sie, ob die gefragte Zahl „genau", „mindestens" oder „höchstens" erreicht werden soll oder ob das gesuchte Ereignis darin besteht, dass die Werte „echt" größer bzw. kleiner als die gefragte Zahl sein sollen.
4.	Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe der Tabelle oder, wenn verfügbar und in Ihrem Bundesland erlaubt, auch elektronisch.

Stichpunktlösung

(1) Binomialverteilung für genau 4-mal 2. Wahl:

$$P(X=4)=B(20;0{,}2;4)=\binom{20}{4}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^{16}\approx 21{,}82\,\%$$

Anmerkung: 4 ist gerade der Erwartungswert für die Anzahl der 2.-Wahl-Fliesen in einer Packung (n · p).

(2) Binomialverteilung für mindestens 18-mal 1. Wahl:

$$P(X\le 2)=F(20;0{,}2;2)=\sum_{i=0}^{2}\binom{20}{i}\cdot 0{,}2^i\cdot 0{,}8^{20-i}\approx 20{,}61\,\%$$

(3) Binomialverteilung für mindestens 2-mal und höchstens 6-mal 2. Wahl:

$$P(2\le X\le 6)=P(X\le 6)-P(X\le 1)=F(20;0{,}2;6)-F(20;0{,}2;1)\approx 84{,}41\,\%$$

Aufgabe b)

Die 20 Fliesen einer Packung ...

> **HINWEIS** Die hier gesuchten Wahrscheinlichkeiten lassen sich durch geschicktes Konstruieren von Gegenereignissen und andere kombinatorische Überlegungen direkt hinschreiben. Nur in der dritten Teilaufgabe muss man die Definition von Variationen mit oder ohne Wiederholungen parat haben.

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Führen Sie die gesuchten Ereignisse auf möglichst einfache Weise auf den elementaren Bernoulli-Versuch („diese Fliesensorte“ oder „die andere Fliesensorte“) zurück.
3.	In der dritten Teilaufgabe gehen Sie von der grundlegenden Definition „günstige Fälle durch alle Fälle“ aus.
4.	Mit den von Ihnen gefundenen Formeln sollten sich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten mit einem einfachen Taschenrechner (ohne besondere Statistikfunktionen) berechnen lassen.

Stichpunktlösung

(1) Eine Fliesenreihe komplett 1. Wahl:

Dieses Ereignis lässt sich als Urnenmodell „5-mal 1. Wahl gezogen“ oder noch abstrakter „5-mal Erfolg“ mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p beschreiben. Also ist

$\tilde{p} = p^5 = 32{,}768\,\%$

(2) Mindestens eine Reihe 1. Wahl:

Entweder rechnet man 1 – $F(4;0;0{,}327\,68)$ aus oder man argumentiert folgendermaßen: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Reihe nicht nur 1.-Wahl-Fliesen hat, beträgt $1-\tilde{p} = 67{,}232\,\%$.

Das Ereignis „mindestens eine 1.-Wahl-Reihe“ ist das Gegenereignis von „keine reine 1.-Wahl-Reihe“ bzw. „4 Reihen mit nicht nur 1. Wahl“, also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $1-(1-\tilde{p})^4 \approx 79{,}57\,\%$.

(3) Zwei 2.-Wahl-Fliesen nebeneinander in einer 5er-Reihe:

Es gibt die folgenden vier Möglichkeiten („günstige Fälle"), die beiden 2.-Wahl-Fliesen nebeneinander zu platzieren:

2	2	1	1	1
1	2	2	1	1
1	1	2	2	1
1	1	1	2	2

(Wie wahrscheinlich es ist, dass eine 2.- und keine 1.-Wahl-Fliese kommt, spielt hier keine Rolle, da vorausgesetzt wird, dass die Reihe genau *zwei* 2.-Wahl-Fliesen enthält!)

Die Gesamtzahl aller Möglichkeiten („alle Fälle"), zwei 2.-Wahl-Fliesen und drei 1.-Wahl-Fliesen in eine Reihe zu legen, entspricht der Zahl der Variationen ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge für $n = 5$ und $k = 2$, also

$$\binom{5}{2} = 10$$

Also beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Reihe mit zwei 2.-Wahl-Fliesen diese beiden Fliesen nebeneinander liegen,

$$\frac{4}{10} = 40\ \%$$

Aufgabe c)

Für besonders anspruchsvolle Kunden …

> **HINWEIS** Vierfeldertafel und Baumdiagramm sind zwei gleichwertige Möglichkeiten, die fehlenden Wahrscheinlichkeiten zu berechnen. Sie müssen sich in beiden Fällen zunutze machen, dass das Aussortieren ein Bernoulli-Versuch ist, also sich die Wahrscheinlichkeiten für Aussortieren und Durchlassen jeweils zu 100 % ergänzen. In der zweiten Teilaufgabe benötigen Sie zusätzlich noch die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit.

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Stellen Sie die Vierfeldertafel auf bzw. zeichnen Sie das Baumdiagramm (oder machen Sie beides, wenn Sie genug Zeit haben – kommen Sie am Ende jeweils auf dasselbe Ergebnis, sind Sie auf dem richtigen Weg).
3.	Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

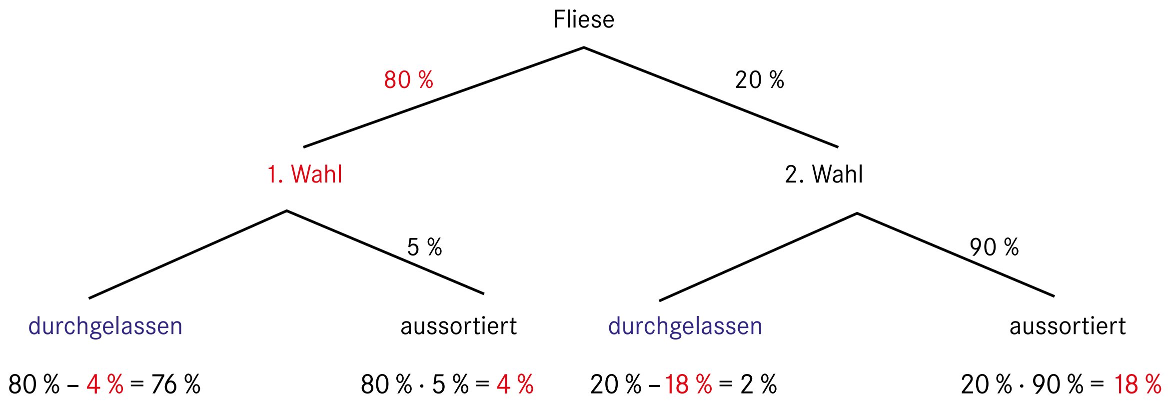
Stichpunktlösung

(1) Vierfeldertafel bzw. Baumdiagramm aufstellen und ergänzen:

Vierfeldertafel:

	1. Wahl	**2. Wahl**	
durchgelassen	$(1 - 0{,}05) \cdot 0{,}8 = 0{,}76$	$(1 - 0{,}9) \cdot 0{,}2 = 0{,}02$	*0,78*
aussortiert	$0{,}05 \cdot 0{,}8 = 0{,}04$	$0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}18$	*0,22*
	0,8	*0,2*	**1,00**

Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Fliese durchgelassen/nicht aussortiert wird, beträgt 76 % + 2 % = 78 %.

(2) Bedingte Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht aussortierte Fliese 2. Wahl ist:

$$P(\text{2. Wahl} \mid \text{nicht auss.}) = \frac{P(\text{2. Wahl} \cap \text{nicht auss.})}{\text{P(nicht auss.)}} = \frac{2\,\%}{78\,\%} \approx 2{,}56\,\%$$

Aufgabe d)

Die Maschine, mit der die Fliesen …

> **HINWEIS** Das Wichtigste beim Hypothesentest ist die korrekte Formulierung von Null- und Alternativhypothese. Den Fehler 1. Art berechnen Sie unter der Annahme, dass die bekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Nullhypothese zutrifft. Den Fehler 2. Art muss man dagegen unter Annahme der im Allgemeinen unbekannten Verteilung bei Vorliegen der Alternativhypothese bestimmen – hier jedoch ist auch diese angegeben, sodass die Rechnung direkt ausgeführt werden kann.

Lösungsschritte

1.	Lesen Sie die Aufgabenstellung aufmerksam durch (besser zweimal als einmal).
2.	Definieren Sie Null- und Alternativhypothese im Sachzusammenhang.
3.	Bestimmen Sie die Verteilungsparameter und prüfen Sie, ob die Binomialverteilung durch die Normalverteilung angenähert werden darf.
4.	Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeiten und bestimmen Sie dann den kritischen Wert der Testvariable, bei dem die Nullhypothese abgelehnt werden muss (oder aber nicht aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden kann).

Stichpunktlösung

(1) Nullhypothese und Entscheidungsregel:

Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest: Die Nullhypothese H_0 lautet „$p = 0{,}2$“ („keine Veränderung“), die Alternativhypothese H_1 ist „$p < 0{,}2$“ („weniger 2.-Wahl-Fliesen als vorher“).
Erwartungswert μ und Standardabweichung σ unter der Voraussetzung H_0 („$p = 0{,}2$“):

$$\mu = n \cdot p = 20; \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 4 > 3$$

Es ist also zulässig, die Binomialverteilung durch die Normalverteilung anzunähern.
Ein *Fehler 1. Art* wird gemacht, wenn bei Vorliegen der Nullhypothese die Alternativhypothese angenommen wird (fälschliche Wahl der Alternative), im Sachzusammenhang also die Annahme, dass die neue Maschine weniger 2.-Wahl-Fliesen herstellt, obwohl sie das gar nicht tut. Als Entscheidungsregel wählen wir eine Fliesenzahl 20 – K, unterhalb der wir die Alternativhypothese („weniger 2. Wahl“) annehmen. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies bei Vorliegen der Nullhypothese „$p = 0{,}2$“ fälschlicherweise geschieht, soll kleiner als 5 % sein:

$$P(X \le \mu - K) \overset{!}{\le} 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X < \mu + K) \overset{!}{\ge} 0{,}95$$

Mit $K > 1{,}64 \cdot \sigma = 6{,}56$ erhalten wir als Entscheidungsregel, dass von den 100 Fliesen höchstens 13 Fliesen 2. Wahl sein dürfen, wenn wir glauben wollen, dass die neue Maschine weniger 2. Wahl auswirft als die alte.

(2) Fehler 2. Art:

Ein *Fehler 2. Art* wird gemacht, wenn die Nullhypothese falsch ist, d. h., wenn die Alternativhypothese zutrifft („neue Maschine ist wirklich besser"), man aber trotzdem die Alternative (und damit die neue Maschine) verwirft (fälschliches Beharren auf der Nullhypothese).
Erwartungswert μ und Standardabweichung σ unter der Voraussetzung H_1 („$p = 0{,}15$"):

$\mu = n \cdot p = 15; \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 3{,}5707 > 3$.

Auch mit den unter der neuen Wahrscheinlichkeitsverteilung geänderten Werten für Erwartungswert und Standardabweichung ist die Näherung durch die Normalverteilung gerechtfertigt.
Die Entscheidungsregel aus Aufgabe (1) besagt, dass man bei mehr als 13 Fliesen davon ausgeht, dass die Maschine immer noch mit 20 % Wahrscheinlichkeit 2.-Wahl-Fliesen produziert.
Gefragt ist jetzt die Wahrscheinlichkeit für mindestens 14 „gezogene" 2.-Wahl-Fliesen, wenn deren Anteil insgesamt 15 % beträgt.
Dazu müssen wir noch auf Standardwerte normieren, also

$$X \to X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \approx \frac{X-15}{3{,}5707}$$

Es ergibt sich dann

$$P_{0,15}(X \geq 14) = P_{0,15}\left(X^* \geq -\frac{1}{3{,}57}\right) = 1-\Phi\left(-\frac{1}{3{,}57}\right) = \Phi\left(0{,}28\right) \approx 61\,\%$$

(Alternativ kann man natürlich auch die Binomialverteilung benutzen. Dann erhält man
$P_{0,15}(X \geq 14) = 1 - F(100; 13; 0{,}15) = 1 - 34{,}74\,\% = 65{,}26\,\%$.)

© Duden 2020
Bibliographisches Institut GmbH
Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

Die Veröffentlichung der Originalprüfungen erfolgt mit freundlicher Genehmigung des zuständigen Kultusministeriums. Die Lösungsvorschläge liegen nicht in der Verantwortung des Kultusministeriums.

Autor der Lösungsvorschläge:
Dr. Matthias Delbrück